UNIVERSIDAD SANTO TOMAS
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA

Comunicaciones en Estadística
Diciembre 2013, Vol. 6, No. 1

En defensa de la racionalidad bayesiana: a propósito de Mario Bunge y su "Filosofía para médicos"

In defense of the Bayesian rationality: about Mario Bunge and his "Philosophy for physicians"

Luis Carlos Silva[a]
*

Resumen

Se valoran críticamente los juicios generales que se hacen sobre la teoría de probabilidades y su aplicación en el campo de la salud en el libro "Filosofía para médicos", del físico y epistemólogo argentino Mario Bunge. La obra contiene varias imprecisiones e yerros en esta materia, los cuales son objeto de análisis en el presente artículo. Al manejar los conceptos propios de la inferencia bayesiana, en particular en relación con la aplicación del teorema de Bayes, el libro incluye errores y falacias que se también se discuten e ilustran pormenorizadamente.

***Palabras clave*:** Inferencia, probabilidades subjetivas, frecuentismo, estadística bayesiana, medicina.

Abstract

This paper critically assesses the general judgements made about probability theory and its application in the field of health in the book "Philosophy for physicians"written by the physicist and epistemologist Mario Bunge. The book contains several inaccuracies and mistakes in this area, which are analysed in this article. When handling the concepts concerning Bayesian inference, in particular in relation to the application of Bayes's theorem, the text includes errors and fallacies that are also discussed and illustrated in detail.

***Key words*:** Inference, subjective probabilities, frecuentist, Bayesian statistics, medicine.

a*

1. Introducción

El físico y filósofo de la ciencia argentino Mario Bunge publicó recientemente el libro "Filosofía Para Médicos"(Bunge 2012) dedicado a examinar problemas relacionados con la práctica médica desde una perspectiva filosófica y epistemológica. Se abordan en él temas de muy diversa índole, lo cual ha motivado un artículo (Silva 2013), que intenta repasar críticamente su contenido en términos generales. El material de Bunge incluye algunos asuntos estadísticos, y muy en particular, varias ideas relacionadas con el pensamiento bayesiano, que merecen a mi juicio un tratamiento específico, motivo de la presente contribución. En esta área, el texto tiene varias imprecisiones, frases difusas o sin sentido, premisas equivocadas, y respuestas erróneas.

La presente nota procura discutir y fundamentar con cierto detalle estos puntos de vista. Me detendré en diversas cuestiones terminológicas, conceptuales y prácticas ubicadas en el entorno del Teorema de Bayes, con especial énfasis en el desmontaje de un ejemplo, donde el autor "demuestra"que, según los bayesianos, tener el VIH no incrementa la probabilidad de padecer SIDA y explica que, para ser consecuentes, los bayesianos han de creer en la resurrección.

2. Subjetividad y arbitrariedad

El error fundamental de Bunge -que atraviesa toda su prédica antibayesiana- reside en no comprender que arbitrariedad y subjetividad son dos conceptos totalmente diferentes. *"Por ser subjetivas, las probabilidades bayesianas son arbitrarias"* afirma textualmente (página 99). Si bien la arbitrariedad y el capricho distorsionan cualquier discurso científico, la subjetividad es inevitable en la ciencia, como ha sido de sobra constatado (Press & Tanur 2001, Silva & Benavídes 2003). A partir de ese equívoco, atribuye a los estadísticos bayesianos una conducta antojadiza:

"El bayesiano asigna las probabilidades que se le antoje y no le molesta el que otros asignen valores diferentes: las probabilidades son tan subjetivas como las preferencias estéticas. .. Los conceptos de azar (o desorden) objetivo y de verdad objetiva o impersonal no intervienen en la interpretación bayesiana." (Página 99)

Poco más abajo (página 100), reafirma la idea:

"Contrariamente a lo que suponen los bayesianos (y los partidarios de las teorías de la elección racional), no es legítimo asignar una probabilidad a todo hecho. Solo los hechos al azar y los escogidos al azar tienen probabilidades."

Y un par de páginas más adelante Bunge va más lejos y asevera que no cabe siquiera *"hablar de probabilidades en medicina"*; éstas solo podrían ser aplicadas en procesos intrínsecamente aleatorios, tales como cuando se lanza un dado o cuando nos ocupamos de la meiosis que, según comunica (página 102), es *"el único proceso biótico auténticamente aleatorio"*.

La idea presente en la interpretación de la probabilidad como un atributo subjetivo es que, ante un fenómeno aleatorio o concebido como tal para resolver determinado problema (en el sentido de que puede verificarse o no y que resulta imposible conocer de antemano cuál de esos desenlaces se producirá), se asigna, de forma implícita o explícita, una probabilidad que representa el grado de confianza o creencia que se tiene en la ocurrencia de ese hecho. Da igual si se trata de que "salga «cara» cuando se lance una moneda ligeramente doblada con un alicate", de que "obtenga Obama la reelección.º de que "Brasil empate con Corea del Norte en un partido próximo a celebrarse en el mundial de fútbol".

Las diferencias esenciales con la interpretación frecuentista radican en que la asignación de valores, aunque condicionada por la información de que se disponga, es propia de cada observador particular, sin que las opiniones de varios analistas tengan que coincidir y en que estos valores pueden atribuirse también a hechos singulares o irrepetibles. En la concepción frecuentista, sin embargo, la probabilidad de cierto suceso es un número único e ideal (concretamente, el límite de la razón entre el número de veces que dicho suceso ocurre y el número de veces en que se lleva adelante el proceso que pudiera producirlo, cuando este último número tiende a infinito), y lo que puede variar son las estimaciones que hacemos de ella.

Cuando se dice que la probabilidad de que Brasil gane a Corea del Norte en un partido que disputarán en el Campeonato Mundial es 0.95, la de que empate 0.04 y la de que pierda es 0.01, no se han elegido esos números de una tabla de números aleatorios ni a raíz de preferencias estéticas. Se han fijado sobre una base subjetiva -el desempeño de sus delanteros en partidos recientes, el número de jugadores que ya tienen una tarjeta amarilla, el valor de los porteros en el mercado, los resultados obtenidos en partidos recientes y la calidad de los contrincantes en dichos partidos, etc.-, pero no arbitraria[1].

Obviamente, para que esta interpretación pueda ser aplicada exitosamente en un marco operativo, es menester que quienes se acogen a ella mantengan un cierto grado de racionalidad en la asignación de probabilidades. Si se quiere hacer inferencias válidas, los valores que se determinen no pueden ser fruto del capricho o del ?antojo? de quien los fija. Una vez asignados por esa vía los grados de confianza que se tenga en la ocurrencia de los sucesos, si los valores correspondientes satisfacen los axiomas de Kolmogorov (Véase Anexo), ya se opera con esas probabilidades como con cualquier otra manera de definirlas que también cumpla aquellos axiomas.

"Solo los hechos al azar y los escogidos al azar tienen probabilidades", sostiene Bunge. Es ciertamente difícil o imposible de interpretar el concepto de que un hecho "tenga probabilidades". Los eventos no tienen probabilidades; se les atribuyen probabilidades de ocurrencia, sea subjetivamente o partir de información empírica, si se considera que ello puede ser fructuoso. No es un detalle baladí sino medular: mientras lo primero apunta a un rasgo que sería presuntamente intrínseco a determinados "hechos", lo segundo es una convención que por lo general se adopta con fines operativos.

[1]Dicho sea de paso, esos dos equipos no se habían enfrentado jamás antes, de modo que sería imposible realizar una estimación frecuentista.

Finalmente, llamo la atención sobre la afirmación de Bunge (página 101) de que la interpretación bayesiana no se adecua a las ciencias de la salud, ya que en ellas no prima la diversidad de opiniones. Los pacientes y los médicos, según él, afortunadamente saben que *"si hay diferencias de opinión acerca de un tratamiento o una diagnosis, suele recabarse la opinión de un tercero o de un panel de expertos, de quienes se espera no solo opinión sino también argumentos fundados en las ciencias biomédicas"*. Lo que no capta Bunge es que, en cualquier caso, hablamos de una opinión, en la cual participará inexorablemente cierto grado de subjetividad, a veces muy grande, a veces menor. No puede ser de otro modo debido a que las ciencias biomédicas están plagadas no solo de incertidumbres, verdades provisionales, controversias y dudas, sino que con mucha frecuencia, como demuestra Ioannidis (n.d.), dan por cierto aquello que no lo es. Y finalmente, los "argumentos fundados"no son privativos de las ciencias biomédicas; también comparecen en la asignación de probabilidades, y tal asignación puede adoptarse asimismo tras la consulta con otro especialista o con un panel de expertos.

3. Causalidad y casualidad

El autor objeta que *"se ha supuesto que tanto el tener VIH como el tener SIDA son hechos al azar"*, cuando en realidad estos dos acontecimientos, afirma, *"no son casuales sino causales"*. Establece así una falsa dicotomía.

Aparentemente, Bunge quiere decir con ello que se trata de un hecho cuya ocurrencia obedece a una causa, a diferencia de los sucesos a los que él llama "casuales", los cuales estarían exclusivamente determinados por el azar. Sin embargo, nada prohíbe que, aunque un acontecimiento tenga una causa, cuando aún no conocemos el desenlace del proceso que podría producirlo, le atribuyamos una probabilidad de ocurrencia, incluso si conociéramos cabalmente el mecanismo causal que subyace (algo que suele no ocurrir). En el sentido que lo maneja Bunge, la muerte de un individuo es "causal", ya que siempre hay una causa para la muerte; pero es evidente que también es "casual", en el sentido de que es imposible saber ni cuándo ni dónde ocurrirá, de modo que es completamente natural que se maneje la probabilidad de que tal hecho se consuma antes de que transcurra cierto lapso prefijado. La única regla que hay que cumplir es que tales asignaciones no transgredan los axiomas de Kolmogorov.

Ahora bien, el meollo de este debate reside en lo siguiente: ¿sobre qué bases se puede aceptar o no un enfoque metodológico dado en el contexto de la solución de un problema? En el marco que nos ocupa, esto se traduce en la pregunta ¿cuál pudiera ser el árbitro que concede o no validez a la asignación de probabilidades a los eventos no aleatorios en el sentido objetivo de la probabilidad? A discutir este asunto se destina la siguiente sección.

4. La legitimidad de los modelos probabilísticos

Examinemos más detenidamente la afirmación según la cual *"No es legítimo asignar una probabilidad a todo hecho. Solo los hechos al azar y los escogidos al azar tienen probabilidades"*.

Más allá de que no se sabe qué es que un hecho "tenga"probabilidad, la pregunta cuya repuesta tiene interés aquí es esta: ¿Qué rasgos otorgan o quitan "legitimidad.[a] un modelo probabilístico, entendido como una idealización o representación de la realidad que procura simplificarla para poderla examinarla mejor y para luego aplicar sus derivaciones con vistas a resolver un problema práctico concreto en el contexto del marco de incertidumbre que le dio vida? Un modelo en general -pero especialmente, estadístico o predictivo- solo puede deslegitimarse (al igual que ocurre con un modo de conducirse con vistas a resolver un problema, siempre que no incorporemos la dimensión ética en su valoración) es que dicho modelo (o dicha conducta) no contribuya a resolver el problema que ha llevado a concebir el primero (o a desplegar la segunda).

Como se explica en el Anexo, una probabilidad es una función que otorga un valor entre 0 y 1 a cualquier suceso (subconjunto) de un conjunto universo (un espacio muestral) a la que se exige el cumplimiento de ciertos axiomas.

¿Cómo se define la función P sobre dicho espacio? Obviamente, dependerá del empleo que uno quiera hacer de ella en términos reales o prácticos. Es importante recordar que "los números no saben de dónde vienen"(Lord 1953, Silva 1997). De modo que, ante un espacio muestral concreto, el analista puede en principio definir dicha función como crea más oportuno y, si cumple los axiomas mencionados, estaremos ante una función de probabilidad.

Son esas probabilidades subjetivamente determinadas las que, por ejemplo, emplean las casas de apuestas para fijar, mediante sus inversos, los odds que a su vez sirven para establecer cuánto se paga por un acierto. Si fueran "arbitrarias", tales empresas quebrarían, como veremos más abajo. Sin embargo, lo que hacen es ganar sumas millonarias. Acaso no haya mejor ejemplo del absurdo de decir que no se pueden manejar probabilidades en relación con eventos que son "causales". Obviamente, si Brasil vence es por una causa (porque hace más goles que Corea del Norte); y si Obama gana las elecciones será por una causa evidente: porque obtiene más votos que su contrincante. El desenlace es debido a una causa; pero el proceso que lo determina permite manejar dicho desenlace como un suceso aleatorio debido a que no existe manera alguna de identificarlo con certeza de antemano, aunque conozcamos el valor de muchas de las variables que pudieran influir en él.

Y por si fuera poco, en procesos totalmente determinísticos, gobernados por reglas precisas, el manejo de probabilidades para hacer el ejercicio de ingeniería inversa que conduzca a desentrañarlas, a partir de los datos, puede ser extraordinariamente fructuoso. El ejemplo más elocuente, desde mi punto de vista, es el del gran matemático británico Alan Turing quien, empleando recursos bayesianos, consiguió desencriptar el llamado código generado por la máquina *Enigma* usado por los alemanes durante la Segunda Guerra Mundial (el cual no solo era “causal”sino algorítmico), conquista que resultó esencial para acelerar la victoria de los aliados en esa contienda (véase Good (1979) y http://blogs.elpais.com/turing/2012/12/alan-turing-y-la-estadistica-bayesiana.html).

En términos generales, si el manejo que se haga de un espacio de probabilidad bien definido es fructuoso o no, tal y como ocurre con cualquier modelo, es harina de otro costal. Pudiera no serlo, pero con muchísima frecuencia lo es, como en los ejemplos arriba mencionados. Por poner otro más, fácilmente comprensible, consideremos el siguiente.

A las casas de apuestas les resulta obviamente redituable. No es una casualidad, por cierto, que todas ellas otorguen más o menos los mismos premios. Si sus decisiones fueran “arbitrarias”, una casa pagaría, por ejemplo, 3.70 euros a quien haya apostado un euro por la victoria de Brasil en caso de que esta se produzca, otra desembolsaría 212.51 euros y otra pagaría 1.03 euros. Pero como no son arbitrarias, y como todas las empresas usan los mismos métodos para determinar racionalmente esas probabilidades (la llamada “elicitation”de las probabilidades (véase Garthwaite et al. (2005)), el monto de los premios es similar entre una empresa y otra (por ejemplo, 1.31, 1.29, 1.35....), como puede comprobarse fácilmente consultando varios sitios Web dedicados a manejar apuestas en la víspera de un partido crucial.

Para que se comprenda esto más claramente, imaginemos que antes de un partido se puede apostar por el desenlace “el número de goles será par”, o su complementario, “el número de goles será impar”. Cuando se ofrece esa posibilidad, las casas de apuestas pagan 1.95 euros a quien haya apostado un euro y haya acertado. Puesto que evidentemente (considerando que un empate a cero arroja un resultado par) se trata de desenlaces que pueden considerarse equiprobables, lo “justo”sería pagar 2 euros, en caso de acierto, en lugar de 1.95 (que es el 97.5 % de 2) por cada euro apostado. La disminución la establecen los organizadores de la apuesta, en lo sucesivo “la banca”, para garantizarse una ganancia (de lo contrario, ella solo serviría como intermediaria para que el dinero pasara de unos apostadores a otros). Bunge afirmaría que el carácter par o impar del número de goles no es aleatorio sino causal (ya que depende de cómo se hayan desempeñado los equipos y no responde a un experimento o una selección regidos por el azar) y que por tanto los usuarios de las probabilidades subjetivas actúan a su antojo.

Imaginemos que la banca, en efecto, se conduce tal y como lo haría un individuo cuando emite juicios estéticos sobre un poema o elige el color de su ropa. Supongamos que otorgan a priori probabilidad 0.2 a que el número de goles sea par y 0.8 a que sea impar. Eso les obligaría a pagar el 97,5 % de 5 euros (inverso de 0.2) por cada euro apostado a esta posibilidad en caso de que se produzca, y el 97,5 % de 1.25 euros (inverso de 0,8) en el otro caso [2] (es decir, 4.88 y 1.22 euros respectivamente). Puesto que cualquier apostador racional intuye que un número

[2] El 97,5 % se debe a que las casas pagan siempre un porcentaje inferior a 100 para garantizar una ganancia. Típicamente, en situaciones menos obvias, el porcentaje es bastante menor (entre un 90 y un 92 %)

par de goles es tan probable como uno impar, la inmensa mayoría aprovecharía el carácter irracional de esta oferta y apostaría por la opción de que dicho número sea par, con la consiguiente ruina para la banca. Obviamente, la banca no elige probabilidades arbitrariamente, única explicación para que, en lugar de ser un estruendoso fracaso, su negocio sea extraordinariamente próspero.

El proceso, en suma, para atribuir probabilidades a sucesos no intrínsecamente aleatorios, dista de ser "arbitrario". Puede ser parcial o totalmente subjetivo, pero es racional; y puede ser, desde luego, muy útil.

Bunge reniega del empleo de la teoría de probabilidades incluso en situaciones donde ni siquiera interviene la subjetividad para su definición. Llega a decir (página 102) que llamar "probabilidades", a las frecuencias relativas que manejan los epidemiólogos *"es doblemente errado: porque las frecuencias son propiedades colectivas y porque el uso de probabilidades solo se justifica con referencia a procesos aleatorios"*, dado que los procesos subyacentes tienen raíces causales. Y en la página 143 vuelve sobre el tema al considerar que:

"Es verdad que se habla a menudo de la «probabilidad» de que tal tratamiento cure tal mal, pero este uso del concepto de probabilidad es incorrecto, porque el concepto en cuestión es teórico, no empírico. Las probabilidades de que se habla en medicina y en epidemiología son en realidad frecuencias relativas, y éstas no están necesariamente (lógicamente) relacionadas con el azar."

De aquí concluye que *"los médicos ... harán bien en limitarse a manejar frecuencias estadísticas"* sin considerarlas probabilidades.

La esperanza de vida, un parámetro capital de la salud pública contemporánea, se estima, sin embargo, a través de la teoría de probabilidades. Las compañías de seguro, por poner otro ejemplo, ganan sumas enormes aplicando una teoría que, según Bunge, no es legítimo emplear. Nuevamente: para estas, lo metodológicamente legítimo es un modelo que sirva a sus intereses. Puesto que solo extienden pólizas a sujetos que están vivos, se manejan con las probabilidades de que mueran dentro de lapsos específicos. Ningún ucase metodológico los persuadirá de no emplear probabilidades. Lo que saben es, por ejemplo, que la misma póliza no debe costar igual (ni dar las mismas recompensas) en Baltimore que en Nairobi, simplemente porque las probabilidades de morir antes de cumplir $N + 1$ años no son iguales para sujetos de edad N en uno y otro enclave.

Análogamente, los modelos empleados para los vaticinios electorales suelen ser fallidos en España (Mora 2012) y otros sitios (donde usan recursos frecuentistas clásicos), pero pueden ser virtualmente perfectos, como ocurrió en las dos últimas elecciones presidenciales en Estados Unidos con los realizados por Nate Silver con el auxilio de técnicas bayesianas (Garicano 2012, Silver 2012). Sus resultados han sido tan notables que en varios foros de Internet se ha considerado que el verdadero ganador de las últimas elecciones fue el reverendo Thomas Bayes, y no Barak Obama.

En el campo propiamente de la toma de decisiones médicas, como demuestra el profesor de la Oregon Health and Science University, Denis Mazur, el recorrido histórico de recursos empleados conduce al punto actual en que los procedimientos bayesianos – empleando probabilidades provenientes tanto del marco frecuentista como del subjetivo – ocupan ya un lugar irreversible (Mazur 2012).

Si se quieren ver algunas decenas de ejemplos adicionales, se pueden hallar en el apasionante y aclamado libro de McGrayne (2011), que versa sobre la extraordinaria historia de las aplicaciones bayesianas.

5. Examinando el ejemplo central de Bunge

5.1. Portar el VIH no incrementa la probabilidad de padecer SIDA

La transcripción textual del ejemplo central de Bunge (página 100) es la siguiente:

"Es sabido que el virus VIH es una causa necesaria del SIDA. O sea, el estar sidado implica el tener VIH, aunque no a la inversa. Supongamos que se haya probado que cierto individuo tiene el virus VIH. Un bayesiano preguntará cuál es la probabilidad de que, además, el individuo tenga o pronto adquiera el SIDA. Para contestar la pregunta empezará por suponer que se le aplica el teorema de Bayes, que en este caso reza

$$P(SIDA|VIH) = \frac{P(VIH|SIDA)P(SIDA)}{P(VIH)}$$

donde la expresión $P(A)$ significa la probabilidad absoluta (o antecedente) de A, mientras que $P(A|B)$ se lee «la probabilidad condicional de A dado (o suponiendo) que B».

Puesto que el análisis de laboratorio muestra que el individuo en cuestión lleva el virus, el bayesiano pondrá $P(VIH) = 1$. Y puesto que todos llevan el virus, también se pondrá $P(VIH|SIDA) = 1$. Reemplazando estos valores en la fórmula de Bayes, ésta se reduce a $P(SIDA|VIH) = P(SIDA)$. Pero esto es falso: hay personas con VIH que no han desarrollado SIDA".

5.2. Algunas precisiones terminológicas y conceptuales

Salta a la vista que, en rigor, no es lo mismo la probabilidad de que "cierto individuo tenga SIDA", a la de que "adquiera SIDA en el futuro". Lo primero es algo que se puede valorar mediante la determinación del nivel de linfocitos y la presencia de determinadas dolencias (tales como sarcoma de Kaposi o neumonías recurrentes). Lo segundo, sin embargo, es algo que puede o no ocurrir dentro de cierto lapso, y que, mientras éste no transcurra, se halla en una zona de incertidumbre, circunstancia que permite hablar de la probabilidad de que ese desenlace acaezca, como se hace a diario con los posibles resultados de muchos procesos morbosos.

La argumentación falaz comienza cuando Bunge, enredado en la naturaleza difusa de las categorías que emplea, habla de que **"se le aplica el teorema de Bayes"** a **"cierto individuo"**. Eso no tiene sentido alguno. Si alguien quiere saber si Juan Pérez tiene SIDA, lo que hace no es aplicar el teorema al sujeto -lo cual en sí mismo no tiene sentido- sino aplicar las técnicas de diagnóstico de dicha enfermedad a Juan.

Se atribuye al bayesiano algo que no hace. Bayesiano o no, nadie aplica la teoría de probabilidades cuando el desenlace ya se ha consumado y puede conocerse por alguna vía cuál fue. El teorema de Bayes es un recurso para calcular la probabilidad de las causas – que ya pasaron o que ya ejercieron su efecto – a partir de ciertos indicios. Lo que hace el bayesiano, o cualquiera que opere con probabilidades, es aplicar estos recursos en el contexto de un "espacio de probabilidad".

Por ejemplo, los trascendentes trabajos de Cornfield (1962), a partir del célebre estudio de Framingham (O'Donnell & Elosua 2008), permitieron construir tablas mediante la aplicación de la regresión logística (cuya finalidad es precisamente estimar probabilidades en función de diversas variables) combinadas con la teoría bayesiana, en las que se consignan las probabilidades de enfermedad cardiovascular y muerte dentro de cierto lapso que tienen sujetos genéricos con determinada edad y sexo, con cierto grado de tabaquismo, de colesterolemia, etc.). Luego, para un sujeto concreto, puede conocerse la probabilidad que le asigna el modelo de morir antes de que transcurra el susodicho lapso (Wilson 2010). Y aplicando tales recursos en el ámbito de la salud pública, se consiguió lo que ha sido calificado como *"uno de los más notables resultados en materia de salud pública del Siglo XX"* debido a que en las tres décadas siguientes *"las tasas de mortalidad por enfermedades cardiovasculares se redujeron en un 60 %, con lo cual pudieron prevenirse 621 mil muertes."* (Mazur, 2012).

Obviamente, no se aplica la regresión logística a un individuo, ni a nadie se le ocurre hacerlo (caso de que fuera posible) para saber si está muerto o no. Se construye un modelo usando una muestra en el contexto de un espacio de probabilidad, y se aplica luego, si se desea, a un sujeto que pudiera o no morir antes, por ejemplo, de que pasen 10 años. La diferencia es crucial, porque lo primero carece de sentido y lo segundo es una práctica habitual y sumamente útil para la clínica, la salud pública y la prevención.

5.3. La aplicación correcta del teorema de Bayes

Es bien conocida la máxima que advierte que *"establecer claramente el espacio de probabilidad será el primer paso imprescindible para estudiar una experiencia o situación en términos probabilísticos. Muchas de las dificultades que surgen en la práctica y en el análisis estadístico de investigaciones clínicas, tienen que ver con el establecimiento implícito y defectuoso de este espacio"* como puede leerse, por ejemplo, en el sitio Web del Hospital Ramón y Cajal de Madrid ($http://www.hrc.es/bioest/Probabilidad_13.html$). De la inobservancia de esta sutil premisa, nace la falacia en que incurre el Sr. Bunge. Veamos.

La regla de Bayes establece que para cualquier par de sucesos A y B, se cumple que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Traducido a los términos de su ejemplo, se trata de la relación:

$$P(SIDA|VIH) = \frac{P(VIH|SIDA)P(SIDA)}{P(VIH)}$$

Sin embargo, el cálculo de sus componentes no se puede realizar mientras no se fije un espacio de probabilidad (Ω, P). Si fijamos que Ω es el conjunto de todas las personas que tienen VIH (supongamos que tiene tamaño V) y consideramos que A es el conjunto de quienes tienen SIDA (de tamaño S), gráficamente, la situación es la que se registra en la Figura 1.

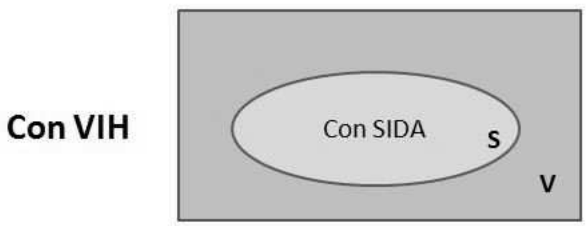

Figura 1: *Representación del espacio muestral conformado por todos los que portan el VIH (tamaño V) y subconjunto de aquellos que padecen SIDA (tamaño S). Fuente: elaboración propia.*

Esto equivale a asumir que solo interesa ahora el conjunto de aquellos sujetos que tienen VIH. Si definimos ahora como B al propio conjunto de quienes tienen VIH, pueden calcularse los componentes de la parte derecha de la ecuación:

$$P(SIDA) = \frac{S}{V}, \quad P(VIH) = \frac{V}{V}, \quad \text{y } P(VIH|SIDA) = \frac{S}{S}$$

de modo que, haciendo las sustituciones correspondientes, se tendrá que:

$$\frac{P(VIH|SIDA)P(SIDA)}{P(VIH)} = \frac{\frac{S}{S}\frac{S}{V}}{\frac{V}{V}} = \frac{S}{V}$$

Si bien hemos llegado a que la probabilidad de tener SIDA dado que se porta el virus (parte izquierda de la ecuación) es S/V, y por ende igual a la probabilidad incondicional de tener SIDA, no hay ninguna contradicción, ya que, bajo la restricción que se ha impuesto (en ese espacio muestral donde no hay sujetos sin el VIH), la probabilidad de tener SIDA es necesariamente igual a la de tenerlo supuesto que se trata de un sujeto de tal espacio, un sujeto que tiene VIH . Dicho de otro modo: la probabilidad de A condicionada a que éste sea un subconjunto de Ω es lo mismo que no condicionarla; estamos hablando, simplemente, de la probabilidad de A. Esto pasa siempre que el espacio muestral sea una condición necesaria para que se produzca A (por ejemplo, la probabilidad de que, tras una relación sexual, una mujer quede embarazada es igual a la probabilidad de que quede embarazada supuesto que es una mujer).

Ahora bien, si el espacio muestral es, por ejemplo, el de todos los seres humanos en una población de referencia dada, tenemos gráficamente la situación que se muestra en la Figura 2.

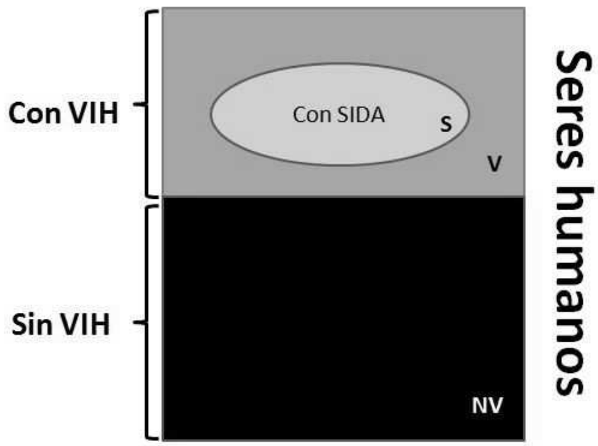

Figura 2: *Representación del espacio muestral conformado por todos los seres humanos de una población de referencia (tamaño N), los subconjuntos de aquellos que portan y no portan el VIH (V y NV respectivamente) y el subconjunto, entre los primeros, que padecen SIDA (tamaño S). Fuente: elaboración propia.*

Llamando NV al tamaño del conjunto de sujetos sin VIH, definamos $N = V + NV$ y consideremos la relación

$$P(SIDA|VIH) = \frac{P(VIH|SIDA)P(SIDA)}{P(VIH)}$$

El término de la derecha será:

$$\frac{P(VIH|SIDA)P(SIDA)}{P(VIH)} = \frac{\frac{S}{S}\frac{S}{N}}{\frac{V}{N}} = \frac{S}{V}$$

coherentemente con lo que nos daría si sustituimos en el término izquierdo los tamaños debidos. Es decir, ya no se cumple que la probabilidad de tener SIDA (S/N), sea igual a la de tenerlo dado que se tiene VIH (S/V).

Bunge incurre en el dislate de atribuir al bayesiano la absurda conducta de aplicar el Teorema de Bayes a "cierto sujeto", de quien sabemos que porta el VIH. A partir de ello, lo que hace es ceñirse al espacio muestral $\Omega = VIH$, en el cual, obviamente, $P(VIH) = P(VIH|SIDA) = 1$. Pero estas relaciones no se cumplen cuando queremos conocer genéricamente (no para un sujeto específico) el valor de $P(SIDA|VIH)$ lo cual exige que operemos en el espacio Ω conformado por una población de referencia, que contiene individuos tanto con VIH como sin él. Habiéndolo hecho, ya podemos aplicar el resultado para un portador del VIH. lo cual exige que operemos en el espacio Ω conformado por una población de referencia, que contiene individuos tanto con VIH como sin él.

Por ejemplo, si suponemos que en cierto espacio la tasa de prevalencia de SIDA asciende al 3 % mientras que los portadores del VIH constituyen el 2 % entre aquellos que no tienen SIDA, se tendrá que:

$$\begin{aligned} P(SIDA|VIH) &= \frac{P(VIH|SIDA)P(SIDA)}{P(VIH)} \\ &= \frac{P(VIH|SIDA)P(SIDA)}{P(VIH|SIDA)P(SIDA) + P(VIH|SIDA^c)P(SIDA^c)} \\ &= \frac{(1)(0.03)}{(1)(0.03) + (0.02)(0.97)} \\ &= 0.61 \end{aligned}$$

Es decir, la probabilidad inicial de 0.03 pasa a ser 20 veces mayor (0.61) cuando se condiciona a que el sujeto tenga VIH.

6. Bunge riza el rizo

El grado en que Bunge sacrifica el rigor con tal de ridiculizar al pensamiento bayesiano se pone de manifiesto en el segmento donde afirma que, para ser consecuentes, tendríamos que creer en la resurrección. Textualmente, escribe (página 101):

"Y si los médicos fuesen consecuentes al aceptar la fórmula de Bayes, tendrían que admitir la posibilidad de la resurrección, ya que dicha fórmula permite calcular la probabilidad de $P(V|M)$ de estar vivo habiendo muerto, a partir de la probabilidad inversa de $P(M|V)$ y de las probabilidades absolutas de estar vivo y de estar muerto."

Su razonamiento se basa en que, como – según él – podemos calcular las probabilidades incondicionales de *"estar vivo"*, la de *"estar muerto"*, y la de *"estar muerto dado que se está vivo"*, entonces se podría calcular, por medio del teorema, la de estar vivo dado que se está muerto. Este galimatías solo puede producirse porque se habla de las tres probabilidades iniciales sin especificar los espacios de probabilidad correspondientes. Si se introduce un conjunto de términos sin sentido alguno (o, como mínimo, sin sentido claro) en una ecuación, se obtendrá inexorablemente algo sin sentido alguno (o sin sentido claro).

En este caso, por ejemplo, Bunge afirma que se podrían calcular las probabilidades de estar vivo y la de estar muerto; la pregunta es, ¿respecto de qué conjunto de personas se calcularían estas probabilidades complementarias? La primera, por ejemplo, sería 1 si hablamos de los obreros que laboran una fábrica, sería 0 si el espacio muestral es el de quienes yacen en el cementerio, ascendería a 0.8 si dicho espacio es el de todos los seres humanos que se encuentran hoy en la morgue de la ciudad, y sería 1 entre miles de millones si fuera el conjunto de todos los humanos que han existido. Y para rematar, hace olímpicamente una afirmación descabellada: que se puede calcular la probabilidad de que alguien esté muerto dado que está vivo. Siendo así, según él, el dislate reside en aplicar el Teorema de Bayes, no en la pretensión de que se pueda aplicar usando un componente que no tiene el menor sentido. En fin, todo esto no es más que un amasijo de vaguedades y contrasentidos, que parecen surgir más como producto de una emoción que de un pensamiento medianamente racional.

7. Consideraciones finales

Ya en su libro "Cápsulas", Bunge (2003) venía insistiendo en consideraciones desatinadas en relación con estos temas. Por poner un solo ejemplo, allí afirma lo siguiente:

"También es falsa la opinión de que tenemos derecho a atribuirle una probabilidad a todo acontecimiento. En efecto, sólo podemos adjudicar probabilidades a acontecimientos aleatorios. Este es el caso del resultado de «revolear» una moneda honesta. En cambio, si la moneda ha sido fabricada por un tahúr, no corresponde hablar de probabilidades."

En un libro destinado a discutir diversos problemas que aquejan a la investigación biomédica (Silva 2009), discutí varias ideas de las expresadas por Bunge en este material, en particular la que he acabo de citar. Allí escribí:

"Me resulta curioso que el gran epistemólogo argentino no capte que la situación es exactamente la opuesta: decir de antemano que una moneda es «honesta» equivale a atribuirle (subjetivamente) una probabilidad de 0.5 a cada lado. Por otra parte, si se parte de calificarla como «honesta», entonces ponerse a «revolearla» ya carece de sentido. Finalmente, si hubiera sido «fabricada por un tahúr», esa sería exactamente la situación en que más claramente procedería «hablar de probabilidad», ya sea con vistas a estimar la que corresponda a cada posible desenlace bajo la definición frecuentista, ya sea subjetivamente – usando nuestro conocimiento, si lo tuviéramos, sobre las «mañas» habituales del tahúr – o incluso combinando ambos enfoques mediante el teorema de Bayes.

En síntesis, la visión que transmite Bunge en su obra sobre las probabilidades y en especial sobre el teorema de Bayes, especialmente en la que motiva la presente nota, no solo es poco rigurosa y a la postre equivocada, sino que es tendenciosa y no parece responder a reflexiones racionales susceptibles de ser desarrolladas tanto desde el conocimiento de la teoría de probabilidades como a partir de la experiencia empírica al respecto.

Recibido: 9 de abril de 2013
Aceptado: 9 de mayo de 2013

Referencias

Bunge, M. (2003), *Cápsulas*, Gedisa, Barcelona.

Bunge, M. (2012), *Filosofía para médicos*, Gedisa, Barcelona.

Cornfield, G. (1962), 'Joint dependence of risk of coronary heart disease on serum cholesterol and systolic bold pressure: A discriminant function analysis. federation proceedings (21:4) pat ii. supplement nº11.'.

Garicano, L. (2012), 'Son las matemáticas, estúpido', *Periódico El País (España). Noviembre 13* .

Garthwaite, P., Kadane, J. & O'Hagan, A. (2005), 'Statistical methods for eliciting probability distributions', *Journal of the American Statisticians Associaton* **100**, 680–701.

Good, I. J. (1979), 'Studies in the history of probability and statistics. xxxvii a. m. turing?s statistical work in the world war ii', *Biometrika* **66**(2), 393–396.

Ioannidis, J. (n.d.), 'Why most published research findings are false?', *PLoS Medicine* **2**(8), e124. doi:10.1371/journal.pmed.0020124.

Lord, F. M. (1953), 'On the statistical treatment of football numbers.', *American Psychologist* **8**, 750–751.

Mazur, D. J. (2012), 'A history of evidence in medical decisions from the diagnostic sign to bayesian inference.', *Medical Decision Making* **32**, 227–231.

McGrayne, S. B. (2011), *The theory that would not die: how bayes? rule cracked the enigma code, hunted down Russian submarines, and emerged triumphant from two centuries of controversy*, New Haven: Yale University Press.

Mora, J. G. (2012), 'Elecciones catalanas 2012: Todas las encuestas fallan', *Periódico ABC (España). Noviembre 26* .

O'Donnell, C. J. & Elosua, R. (2008), 'Cardiovascular risk factors. insights from framingham heart study.', *Revista Española de Cardiología* **61**(3), 299–310.

Press, S. J. & Tanur, J. M. (2001), *The subjectivity of scientists and the Bayesian approach*, Wiley and Sons, New York.

Silva, L. C. (1997), *Cultura estadística e investigación científica en el campo de la salud: Una mirada crítica*, Díaz de Santos, Madrid.

Silva, L. C. (2009), *Los laberintos de la investigación biomédica. En defensa de la racionalidad para la ciencia del Siglo XXI.*, Díaz de Santos, Madrid.

Silva, L. C. (2013), 'Reflexiones a raíz de filosofía para médicos, un texto de mario bunge.', *Salud Colectiva* **9**(1), 115–128.

Silva, L. C. & Benavídes, A. (2003), 'Apuntes sobre subjetividad y estadística en la investigación.', *Revista Cubana de Salud Pública* **29**(2), 170–173.

Silver, N. (2012), *The signal and the noise why so many predictions fail - but some don?t.*, The Penguin Press, New York.

Wilson, P. W. F. (2010), *Estimation of cardiovascular risk in an individual patient without known cardiovascular disease. En: UpToDate. Basow, DS (Ed).*, Massachusetts Medical Society, and Wolters Kluwer publishers, The Netherlands.

A. Definición axiomática de probabilidades de Kolmogorov

Sea Ω un conjunto que se denomina espacio muestral y S el conjunto de todos los subconjuntos de Ω, a los que se denomina sucesos.

Consideremos una función P cuyo dominio sea S y su codominio el conjunto de los números reales ($P: \ S \longrightarrow \Re$). Es decir, P es una regla bien definida por la que se asigna a cada suceso un, y un solo un, número real). Se le llama *función de probabilidad* a dicha aplicación si cumple los tres axiomas siguientes:

(1) $P(A) \geq 0$ cualquiera sea A tal que $A \in S$

(2) $P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$ siempre que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

(3) $P(\Omega) = 1$

A la estructura (Ω, S, P) se le denomina espacio de probabilidad.